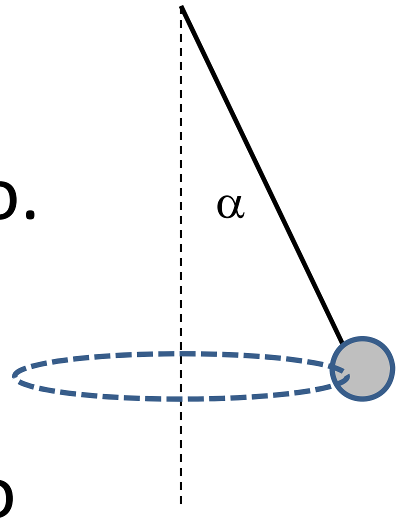
Dinámica

Péndulo cónico

Ejemplo: Péndulo cónico

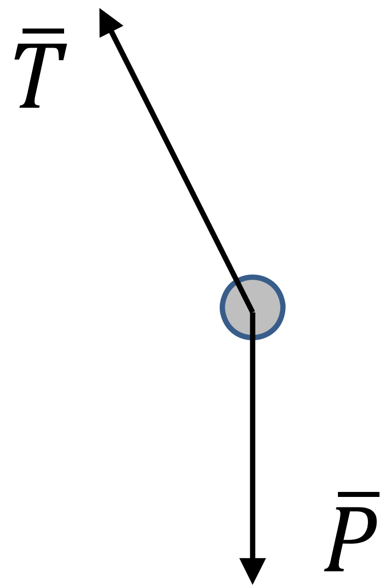
Un objeto de masa M=2kg está unido a una soga de longitud L=1m. El objeto realiza una trayectoria circular en el plano horizontal, en sentido antihorario.



Esto es un péndulo cónico y el ángulo que forma la soga es de α=37° respecto de la vertical.

Determinar la velocidad del objeto y cuánto tiempo tarda en dar una vuelta.

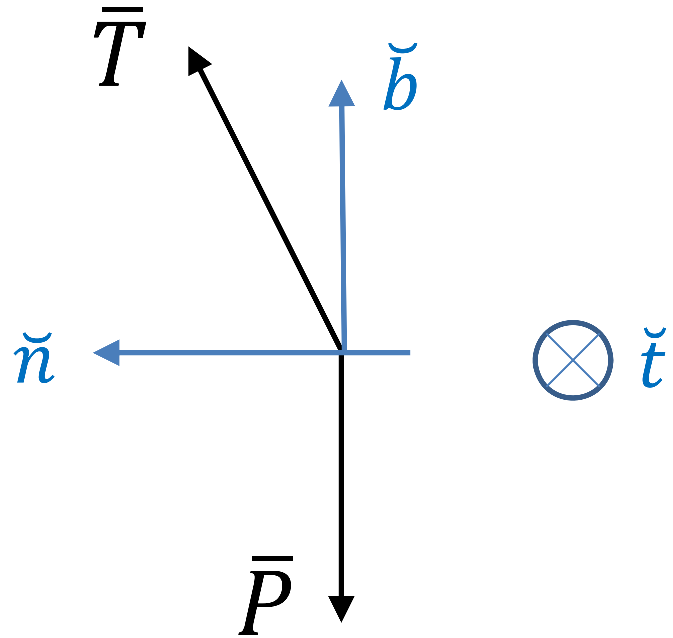
DCL de la masa M



- ¿Sistema de coordenadas?

DCL de la masa M

- SR: Inercial
- SC: intrínsecas



$$\sum \bar{F} = M \cdot \bar{a}$$

Ecuaciones de movimiento

$$\sum \bar{F} = M \cdot \bar{a}$$

- $\breve{t}) -$ $\rightarrow$ la aceleración tangencial es cero. La rapidez es constante y es un MCU

- $\breve{n})\ T \cdot \mathrm{sen}(\alpha) = M \cdot a_n$

- $\breve{b})\ T \cdot \cos(\alpha) - M \cdot g = M \cdot a_b = 0$

Ecuaciones de movimiento

$$\breve{b})\ T \cdot \cos(\alpha) - M \cdot g = 0 \quad \rightarrow \quad T = \frac{M \cdot g}{\cos(\alpha)}$$

$$\breve{n})\ T \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = M \cdot a_n$$

$$\frac{M \cdot g}{\cos(\alpha)} \cdot \operatorname{sen}(\alpha) = M \cdot \frac{v^2}{\rho}$$

$$\boxed{\rho = \mathrm{L} \cdot sen(\alpha)}$$

$$\frac{g \cdot L}{\cos(\alpha)} \cdot \operatorname{sen}^2(\alpha) = v^2$$

Respuestas

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{g \cdot L}{\cos(\alpha)}} \cdot \operatorname{sen}(\alpha)\breve{t}$$

Dado que $v = \Omega \cdot L \cdot sen(\alpha) \;\; \rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{g}{L \cdot \cos(\alpha)}}$

Y en el MCU $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L \cdot \cos(\alpha)}{g}}$

Dinámica

Fuerzas no constantes. Fuerza viscosa

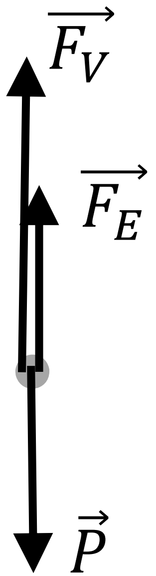
Una roca de masa 3 kg cae desde el reposo en un medio viscoso. Sobre ella actúan la fuerza neta constante de 20 N (combinación de la fuerza gravitatoria y de la fuerza de flotación ejercida por el medio) y la fuerza de resistencia del fluido **F** = -k.**v** (***v*** es la velocidad en m/s y *k* = 2 Ns/m). Calcular:

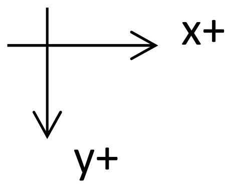
a. aceleración inicial

b. aceleración cuando v = 3m/s

c. velocidad terminal

DCL   Sist. de coord.   Ec. de movimiento





$$\overrightarrow{F_E} = -10N\breve{J}$$

$$\vec{P} = 30N\breve{J}$$

$$\overrightarrow{F_V} = -2\frac{Nm}{s}\vec{v}$$

$$\sum \vec{F} = M.\vec{a}$$

$$\vec{P} + \overrightarrow{F_E} + \overrightarrow{F_V} = M.\vec{a}$$

$$\breve{J})30N - 10N - 2\frac{Nm}{s}v = 3kg.a$$

$$\breve{J})20N - 2\frac{Nm}{s}v = 3kg.a$$

$$\boxed{B - kv = M.a}$$

a) Calcular la aceleración inicial

- Ecuación de movimiento:

$$B - kv = M.a$$

- Inicialmente en reposo: $v_0 = 0\frac{m}{s}$

$$B = M.a_0 \quad \rightarrow \quad a_0 = \frac{B}{M} = \frac{20}{3}\frac{m}{s^2}$$

- Entonces:

b) Calcular la aceleración cuando v=3m/s

- Ecuación de movimiento:

$$B - kv = M.a$$

- En cierto instante: $v_1 = 3\frac{m}{s}$

$$B - kv_1 = M.a_1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{B - kv_1}{M} = \frac{14}{3}\frac{m}{s^2}$$

- Entonces:

c) Calcular la velocidad terminal

- Ecuación de movimiento $B - kv = M.a$

Si analizamos esta ecuación, podemos ver que a medida que la velocidad aumenta, la aceleración disminuye. Entonces la velocidad aumenta cada vez más lento. Hasta un punto en el cual la aceleración se anula y a partir de ahí, el objeto se moverá con velocidad constante (velocidad terminal)

- En la velocidad terminal: $a_{vel\ terminal} = 0\,\frac{m}{s^2}$

- Entonces: $B - kv_{terminal} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{terminal} = \frac{B}{k} = 10\,\frac{m}{s}$

Extra: Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo

$$B - kv = M.a$$

Pero la velocidad y la aceleración varían en el tiempo!

$$B - kv = M.\frac{dv}{dt}$$

Ecuación diferencial de primer orden

$$\int_{t_0=0}^{t} (B - kv)dt = \int_{v_0=0}^{v} Mdv$$

$$\int_{t_0=0}^{t} dt = M \int_{v_0=0}^{v} \frac{1}{(B - kv)} dv$$

Extra: Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo

$$\int_{t_0=0}^{t} dt = M\int_{v_0=0}^{v} \frac{1}{(B-kv)}\,dv$$

Cambio de variables

$$x = B - kv$$
$$dx = -kdv$$

$$t - t_0 = M\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}\left(\frac{-1}{k}\right)dx$$

$$t = \frac{-M}{k}\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x}\,dx = \frac{-M}{k}\ln(x)\Big|_{x_0}^{x} = \frac{-M}{k}\left[\ln(B-kv) - \ln(B)\right]$$

Extra: Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo

$$t = \frac{-M}{k}\left[\ln(B - kv) - \ln(B)\right]$$

$$\frac{-k}{M}t = \ln(B - kv) - \ln(B)$$

$$\frac{-k}{M}t + \ln(B) = \ln(B - kv)$$

$$e^{\frac{-k}{M}t + \ln(B)} = B - kv$$

Extra: Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo

$$e^{\frac{-k}{M}t+\ln(B)} = B - kv$$

$$B.e^{\frac{-k}{M}t} = B - kv$$

$$B.\left(e^{\frac{-k}{M}t} - 1\right) = -kv$$

$$v(t) = \frac{B}{k}.\left(1 - e^{\frac{-k}{M}t}\right)$$

Extra: Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo

$$\vec{v}(t) = \frac{B}{k}.\left(1 - e^{\frac{-k}{M}t}\right)\breve{j}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{B}{M}.e^{\frac{-k}{M}t}\breve{j}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}dt$$

Análisis de ítems anteriores a partir de estos resultados

$$\vec{v}(t) = \frac{B}{k}.\left(1 - e^{\frac{-k}{M}t}\right)\breve{j} \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{B}{M}.e^{\frac{-k}{M}t}\breve{j}$$

- Si t=0s $\overrightarrow{v_0} = 0\frac{m}{s}\breve{j}$; $\overrightarrow{a_0} = \frac{B}{M}\breve{j}$
- Si $\vec{v}_1 = 3\frac{m}{s}\breve{j} \rightarrow v_1 = \frac{B}{k}.\left(1 - e^{\frac{-k}{M}t_1}\right) \rightarrow e^{\frac{-k}{M}t_1} = \frac{B-kv_1}{B} \rightarrow t_1$

  $\rightarrow a_1 = \frac{B}{M}.e^{\frac{-k}{M}t_1} = \frac{B}{M}.\frac{B-kv_1}{B} = \frac{B-kv_1}{M}$
- Si $t \rightarrow \infty$ $\overrightarrow{v_{terminal}} = \frac{B}{k}\breve{j}$; $\overrightarrow{a_{terminal}} = 0\frac{m}{s}\breve{j}$